Beobachtungen über die Integrale der Formeln $\int x^{p-1}dx(1-x^n)^{\frac{q}{n}-1}$ nachdem nach der Integration $x=1$ gesetzt worden ist *

Leonhard Euler

§1 Die Integralformel

$$\int x^{p-1}dx(1-x^n)^{\frac{q}{n}-1}$$

oder auf diese Weise ausgedrückt

$$\int \frac{x^{p-1}dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}}$$

hier im Begriff zu betrachten, nehme ich die Exponenten n, p und q an, ganze positive Zahlen zu sein, weil sie ja, wenn sie solche nicht wären, leicht auf diese Form zurückgeführt werden könnten. Des Weiteren habe ich nicht beschlossen, das Intergral dieser Formel hier im Allgemeinen gründlich zu erwägen, sondern nur seinen Wert, welchen es erhält, wenn nach der Integration $x=1$ gesetzt wird, nachdem natürlich die Integration so durchführt worden war, dass das Intergral nach Festsetzen von $x=0$ verschwindet. Zuerst besteht nämlich kein Zweifel, dass in diesem Fall $x=1$ das Integral um Vieles einfacher ausgedrückt wird; und außerdem, sooft in der Analysis

*Originaltitel: „Observationes cicra integralia formularum $\int x^{p-1}dx(1-x^n)^{\frac{q}{n}-1}$ posito post integrationem $x=1$“, erstmals publiziert in „*Melanges de philosophie et de la mathematique de la societe royale de Turin* 3, 1766, pp. 156-177, Nachdruck in „*Opera Omnia*: Series 1, Volume 17, pp.268 -288“, Eneström-Nummer E321, Übersetzung: Alexander Aycock, Textsatz: Christoph Kadura, im Rahmen des Hauptseminars „Euler“, Wintersemester 2013/2014, JGU Mainz

zu Formeln dieser Art gelangt wird, pflegt meistens nicht so das unbestimmte Integral für irgendeinen Wert von x wie das bestimmte für den natürlich besonderen Wert $x = 1$ verlangt zu werden.

§2 Es ist aber bekannt, dass im Fall, in dem nach der Integration $x = 1$ gesetzt wird, das Integral $\int \frac{x^{p-1}dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}}$ auf die Weise durch ein Produkt unendlich vieler Faktoren ausgedrückt wird, dass ist:

$$\frac{p+q}{p\,q} \cdot \frac{n(p+q+n)}{(p+n)(q+n)} \cdot \frac{2n(p+q+2n)}{(p+2n)(q+2n)} \cdot \frac{3n(p+q+3n)}{(p+3n)(q+3n)} \cdot \text{ etc.},$$

dessen erster Faktor $\frac{p+q}{pq}$ freilich nicht an das Bildungsgesetz der folgenden gebunden ist. Weil dies aber dennoch nicht im Wege steht, ist es klar, dass die Exponenten p und q miteinander vertauschbar sind, sodass ist:

$$\int \frac{x^{p-1}dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}} = \int \frac{x^{q-1}dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-p}}},$$

welche Gleichheit freilich sogar leicht per se gezeigt wird. Aber dieses unendliche Produkt wird uns zu anderen, um vieles größere Dingen geleiten, mit denen diese Integrale mehr ans Licht gebracht werden werden.

§3 Damit ich aber für Kürze beim Schreiben sorge und nicht die Mühe habe, den Schriftzug dieser Formel $\int \frac{x^{p-1}dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}}$ sooft zu wiederholen, möchte ich für jeden Exponenten n an ihrer Stelle schreiben:

$$\left(\frac{p}{q}\right),$$

so dass $\left(\frac{p}{q}\right)$ den Wert der Integralformel $\int \frac{x^{p-1}dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}}$ in dem Fall bezeichnet, in welchem nach der Integration $x = 1$ festgelegt wird. Und weil wir ja gesehen haben, dass in diesem Fall ist:

$$\int \frac{x^{p-1}dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}} = \int \frac{x^{q-1}dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-p}}},$$

ist es offenbar, dass sein wird:

$$\left(\frac{p}{q}\right) = \left(\frac{q}{p}\right),$$

so dass für jeden Wert des Exponenten n diese Ausdrücke $\left(\frac{p}{q}\right)$ und $\left(\frac{q}{p}\right)$ dieselbe Größe bedeuten. So, wenn eines Beispiels wegen $n = 4$ war, wird sein:

$$\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{2}{3}\right) = \int \frac{x^2 dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)^2}} = \int \frac{x dx}{\sqrt[4]{1-x^4}} .$$

Durch ein unendliches Produkt wird man aber haben:

$$\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{2}{3}\right) = \frac{5}{2 \cdot 3} \cdot \frac{4 \cdot 9}{6 \cdot 7} \cdot \frac{8 \cdot 13}{10 \cdot 11} \cdot \frac{12 \cdot 17}{14 \cdot 15} \cdot \text{ etc.}$$

§4 Nun bemerke ich zuerst, wenn die Exponenten p und q größer als der Exponent n waren, dass die Integralformel immer auf eine andere zurückgeführt werden kann, in welcher diese Exponenten unter n herabgesenkt werden. Weil nämlich gilt:

$$\int \frac{x^{p-1} dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}} = \frac{p-n}{p+q-n} \int \frac{x^{p-n-1} dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}} ,$$

wird unter Verwendung der Schreibweise hier sein:

$$\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{p-n}{p+q-n} \left(\frac{p-n}{q}\right),$$

wodurch, wenn $p > n$ war, die Formel auf eine andere, in welcher der Exponent p kleiner ist als n, zurückgeführt wird, was auch wegen der Vertauschbarkeit[1] über den anderen Exponenten q festzuhalten ist. Deswegen wird es uns, im Begriff diese Formeln zu erforschen, genügen, für jeden Exponenten n die Exponenten p und q kleiner als selbigen anzunehmen, weil ja nach Erledigen von diesen alle Fälle, in denen sie größere Werte haben würden, dorthin reduziert werden können.

§5 Sofort tritt es aber klar zutage, dass die Fälle, in denen entweder $p = n$ oder $q = n$ ist, uneingeschränkt oder algebraisch integrierbar sind. Wenn nämlich $q = n$ war, wird wegen $\left(\frac{p}{n}\right) = \int x^{p-1} dx = \frac{x^p}{p}$, nach Setzen von $x = 1$:

$$\left(\frac{p}{n}\right) = \frac{1}{p} \quad \text{und auf die gleiche Weise} \quad \left(\frac{n}{q}\right) = \frac{1}{q} \quad \text{sein.}$$

[1] im Original: commutabilitas

Und diese sind die einzigen Fälle, in denen unsere Integralformeln uneingeschränkt dargeboten werden können, wenn freilich p und q den Exponenten n nicht übersteigen. In allen übrigen Fällen wird die Integration entweder die Quadratur des Kreises oder sogar höhere Quadraturen verwickeln, welche ich hier gründlich betrachten will.
Nach diesen Formeln $\left(\frac{p}{n}\right)$ oder $\left(\frac{n}{p}\right)$, deren Wert uneingeschränkt $= \frac{1}{p}$ ist, kommen also die, deren Wert allein durch die Quadratur des Kreises ausgedrückt wird; dann aber folgen die, die eine gewisse höhere Quadratur erfordern und ich werde versuchen, diese höheren Quadraturen so auf die einfachste Form wie die kleinste Zahl zurückzuführen.

§6 Weil die Zahlen p und q kleiner als der Exponent n festgelegt werden, sind die Formeln $\left(\frac{p}{q}\right)$ allein durch die Quadratur des Kreises integrierbar, in denen $p + q = n$ ist. Es sei nämlich $q = n - p$ und unsere Formel:

$$\left(\frac{p}{n-p}\right) = \left(\frac{n-p}{p}\right) = \int \frac{x^{p-1}dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^p}} = \int \frac{x^{q-1}dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^q}}$$

wird mit diesem Produkt ausgedrückt werden:

$$\frac{n}{p(n-p)} \cdot \frac{n \cdot 2n}{(n+p)(2n-p)} \cdot \frac{2n \cdot 3n}{(2n+p)(3n-p)} \cdot \frac{3n \cdot 4n}{(3n+p)(4n-p)} \cdot \text{ etc.},$$

was auf diese Weise dargestellt:

$$\frac{1}{p} \cdot \frac{nn}{nn-pp} \cdot \frac{4nn}{4nn-pp} \cdot \frac{9nn}{9nn-pp} \cdot \text{ etc.}$$

mit dem Produkt übereinstimmt, mit welchem ich den Sinus eines Winkels ausgedrückt habe. Daher, wenn π für den halben Umfang des Kreises genommen wird, dessen Radius $= 1$ ist, und zugleich das Maß zweier rechter Winkel darbietet, wird sein:

$$\left(\frac{p}{n-p}\right) = \left(\frac{n-p}{p}\right) = \frac{\pi}{n \sin \frac{p\pi}{n}} = \frac{\pi}{n \sin \frac{q\pi}{n}}.$$

§7 In den übrigen Fällen, in denen weder $p = n$ noch $q = n$ und auch nicht $p + q = n$ ist, kann das Integral sogar weder uneingeschränkt noch durch die Quadratur des Kreises dargeboten werden, sondern umfasst eine andere bestimmte höhere Quadratur. Und in der Tat fordern die einzelnen verschiedenen Fälle keine eigene Integration dieser Art ein, sondern es sind mehrere gegeben, mit denen es möglich ist, die verschiedenen miteinander zu vergleichen. Diese Reduktionen werden aber aus dem oben dargebotenen unendlichen Produkt deriviert; weil nämlich ist:

$$\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{p+q}{p\ q} \cdot \frac{n(p+q+n)}{(p+n)(q+n)} \cdot \frac{2n(p+q+2n)}{(p+2n)(q+2n)} \cdot \text{ etc.,}$$

wird auf die gleiche Weise sein:

$$\left(\frac{p+q}{r}\right) = \frac{p+q+r}{(p+q)\ r} \cdot \frac{n(p+q+r+n)}{(p+q+n)(r+n)} \cdot \frac{2n(p+q+r+2n)}{(p+q+2n)(r+2n)} \cdot \text{ etc.,}$$

nach Multiplizieren welcher miteinander erhalten wird:

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{p+q}{r}\right) = \frac{p+q+r}{p\ q\ r} \cdot \frac{nn(p+q+r+n)}{(p+n)(q+n)(r+n)} \cdot \frac{4nn(p+q+r+2n)}{(p+2n)(q+2n)(r+2n)} \cdot \text{ etc.,}$$

wo die drei Größen p, q, r miteinander vertauschbar sind.

§8 Daher erreichen wir also durch Vertauschen dieser Größen p, q, r die folgenden Reduktionen:

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{p+q}{r}\right) = \left(\frac{p}{r}\right)\left(\frac{p+r}{q}\right) = \left(\frac{q}{r}\right)\left(\frac{q+r}{p}\right),$$

woher aus einigen gegebenen Formeln mehrere andere bestimmt werden können. Wie wenn beispielsweise $q+r=n$ oder $r=n-q$ ist, wird wegen:

$$\left(\frac{q+r}{p}\right) = \frac{1}{p} \text{ und } \left(\frac{q}{r}\right) = \frac{\pi}{n\sin\frac{q\pi}{n}}$$

sein:

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{p+q}{n-q}\right) = \frac{\pi}{np\sin\frac{q\pi}{n}}$$

und auch:

$$\left(\frac{p}{n-q}\right)\left(\frac{n+p-q}{q}\right) = \frac{\pi}{np\sin\frac{q\pi}{n}}\ .$$

Darauf, wenn $p+q+r=n$ oder $r=n-p-q$ ist, wird sein:

$$\frac{\pi}{n\sin\frac{r\pi}{n}}\left(\frac{p}{q}\right)=\frac{\pi}{n\sin\frac{q\pi}{n}}\left(\frac{p}{r}\right)=\frac{\pi}{n\sin\frac{p\pi}{n}}\left(\frac{q}{r}\right),$$

woher hervorstechende Reduktionen von der einen auf die anderen entspringen, mit denen die Menge der für unser Ziel notwendigen Reduktionen gewaltig vermindert wird.

§9 Außerdem erlangen wir in der Tat, indem für p, q, r bestimmte Zahlen angenommen werden, die folgenden Gleichheiten von Produkten aus je zwei Formeln:

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{1}\right)\left(\frac{2}{2}\right)=\left(\frac{2}{1}\right)\left(\frac{3}{1}\right),\\
&\left(\frac{1}{1}\right)\left(\frac{3}{2}\right)=\left(\frac{3}{1}\right)\left(\frac{4}{1}\right),\\
&\left(\frac{2}{1}\right)\left(\frac{3}{3}\right)=\left(\frac{3}{1}\right)\left(\frac{4}{2}\right)=\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{5}{1}\right),\\
&\left(\frac{2}{2}\right)\left(\frac{4}{3}\right)=\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{5}{2}\right),\\
&\left(\frac{3}{1}\right)\left(\frac{4}{3}\right)=\left(\frac{3}{3}\right)\left(\frac{6}{1}\right),\\
&\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{5}{3}\right)=\left(\frac{3}{3}\right)\left(\frac{6}{2}\right),\\
&\left(\frac{2}{2}\right)\left(\frac{4}{4}\right)=\left(\frac{4}{2}\right)\left(\frac{6}{2}\right),\\
&\left(\frac{3}{1}\right)\left(\frac{4}{4}\right)=\left(\frac{4}{1}\right)\left(\frac{5}{3}\right)=\left(\frac{4}{3}\right)\left(\frac{7}{1}\right),\\
&\left(\frac{2}{1}\right)\left(\frac{5}{3}\right)=\left(\frac{5}{1}\right)\left(\frac{6}{2}\right)=\left(\frac{5}{2}\right)\left(\frac{7}{1}\right),\\
&\left(\frac{1}{1}\right)\left(\frac{6}{2}\right)=\left(\frac{6}{1}\right)\left(\frac{7}{1}\right)\ \text{etc.},
\end{aligned}$$

wo freilich mehrere auftauchen, die schon in den übrigen enthalten sind.

§10 Nachdem gleichsam diese Grundlagen vorausgeschickt worden sind, möchte ich die allgemeine Formel $\int \frac{x^{p-1}dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}}$, in welcher ich die Zahlen p und q den Exponenten n nicht zu überragen annehme, in aus dem Exponenten n hergeholte Klassen trennen, so dass die Werte $n=1, n=2, n=3, n=4$ etc. die erste, zweite, dritte etc. Klasse liefern werden.

Und die erste Klasse, in der $n=1$ ist, umfasst freilich die eine einzige Formel $\left(\frac{1}{1}\right)$, deren Wert $=1$ ist. Die zweite Klasse, in welcher $n=2$ ist, enthält diese Formeln $\left(\frac{1}{1}\right)$, $\left(\frac{2}{1}\right)$ und $\left(\frac{2}{2}\right)$, deren Entwicklung per se offenbar ist. Die dritte Klasse, in der $n=3$ ist, hat diese:

$$\left(\frac{1}{1}\right), \left(\frac{2}{1}\right), \left(\frac{3}{1}\right), \left(\frac{2}{2}\right), \left(\frac{3}{2}\right), \left(\frac{3}{3}\right).$$

Die vierte Klasse hingegen, in der $n=4$ ist, diese:

$$\left(\frac{1}{1}\right), \left(\frac{2}{1}\right), \left(\frac{3}{1}\right), \left(\frac{4}{1}\right), \left(\frac{2}{2}\right), \left(\frac{3}{2}\right), \left(\frac{4}{2}\right), \left(\frac{3}{3}\right), \left(\frac{4}{3}\right), \left(\frac{4}{4}\right)$$

und so wächst in den folgenden Klassen die Anzahl der Formeln gemäß den Dreieckszahlen. Diese Klassen wollen wir also der Reihe nach durchgehen.

Formen der 2-ten Klasse $\int \frac{x^{p-1}dx}{\sqrt[2]{(1-x^2)^{2-q}}} = \left(\frac{p}{q}\right)$

Es ist hier freilich klar, dass diese Formeln entweder uneingeschränkt oder durch die Quadratur des Kreises ausgedrückt werden; denn diese $\left(\frac{2}{1}\right)$ und $\left(\frac{2}{2}\right)$ sind uneingeschränkt gegeben und wegen $1+1=2$ ist die übrige $\frac{\pi}{2\sin\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$; wenn wir also der Kürze wegen $\frac{\pi}{2} = \alpha$ setzen, wie wir es natürlich in den folgenden Klassen machen werden, werden alle Formeln dieser Klasse so definiert:

$$\left(\frac{2}{1}\right) = 1, \left(\frac{2}{2}\right) = \frac{1}{2};$$
$$\left(\frac{1}{1}\right) = \alpha.$$

Formen der 3-ten Klasse $\int \frac{x^{p-1}dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)^{3-q}}} = \left(\frac{p}{q}\right)$

Weil hier $n = 3$ ist, ist die die Quadratur des Kreises involvierende Formel:

$$\left(\frac{2}{1}\right) = \frac{\pi}{3\sin\frac{\pi}{3}} \text{ , wir wollen also } \left(\frac{2}{1}\right) = \alpha \text{ festlegen;}$$

aber die übrigen Formeln, die nicht uneingeschränkt gegeben sind, involvieren höhere Quadratur und freilich die eine einzige $\left(\frac{1}{1}\right)$, welche wir mit dem Buchstaben A anzeigen wollen; nach Erlauben von dieser werden wir die Werte aller Formeln dieser Klasse angeben können:

$$\left(\frac{3}{1}\right) = 1 \text{ , } \left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2} \text{ , } \left(\frac{3}{3}\right) = \frac{1}{3} \text{ ;}$$
$$\left(\frac{2}{1}\right) = \alpha \text{ , } \left(\frac{2}{2}\right) = \frac{\alpha}{A} \text{ ;}$$
$$\left(\frac{1}{1}\right) = A \text{ .}$$

Formen der 4-ten Klasse $\int \frac{x^{p-1}dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)^{4-q}}} = \left(\frac{p}{q}\right)$

Weil hier $n = 4$ ist, haben wir zwei von der Quadratur des Kreises abhängende Formeln, deren Werte, weil sie bekannt sind, wir so anzeigen werden:

$$\left(\frac{3}{1}\right) = \frac{\pi}{4\sin\frac{\pi}{4}} = \alpha \quad \text{und} \quad \left(\frac{2}{2}\right) = \frac{\pi}{4\sin\frac{2\pi}{4}} = \beta \text{ .}$$

Außerdem ist eine einzige eine höhere Quadratur involvierende Formel von Nöten, nach Einräumen welcher wir alle übrigen erkennen werden. Wir wollen $\left(\frac{2}{1}\right) = A$ festlegen und alle Formeln dieser Klasse werden so bestimmt werden:

$$\left(\frac{4}{1}\right) = 1 \text{ , } \left(\frac{4}{2}\right) = \frac{1}{2} \text{ , } \left(\frac{4}{3}\right) = \frac{1}{3} \text{ , } \left(\frac{4}{4}\right) = \frac{1}{4} \text{ ;}$$
$$\left(\frac{3}{1}\right) = \alpha \text{ , } \left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\beta}{A} \text{ , } \left(\frac{3}{3}\right) = \frac{\alpha}{2A} \text{ ;}$$
$$\left(\frac{2}{1}\right) = A \text{ , } \left(\frac{2}{2}\right) = \beta \text{ ;}$$
$$\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{\alpha A}{\beta} \text{ .}$$

FORMEN DER 5-TEN KLASSE $\int \frac{x^{p-1}dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^{5-q}}} = \left(\frac{p}{q}\right)$

Weil hier $n = 5$ ist, wollen wir sofort diese von der Quadratur des Kreises abhängenden Formeln anmerken:

$$\left(\frac{4}{1}\right) = \frac{\pi}{5\sin\frac{\pi}{5}} = \alpha \quad \text{und} \quad \left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\pi}{5\sin\frac{2\pi}{5}} = \beta\,.$$

Es sind aber darüber hinaus zwei neue Quadraturen von Nöten, die dieser Klasse eigen sind, welche wir so bezeichnen wollen:

$$\left(\frac{3}{1}\right) = A \quad \text{und} \quad \left(\frac{2}{2}\right) = B\,,$$

aus welchen alle übrigen so bestimmt werden:

$$\left(\frac{5}{1}\right) = 1\,, \left(\frac{5}{2}\right) = \frac{1}{2}\,, \left(\frac{5}{3}\right) = \frac{1}{3}\,, \left(\frac{5}{4}\right) = \frac{1}{4}\,, \left(\frac{5}{5}\right) = \frac{1}{5}\,;$$
$$\left(\frac{4}{1}\right) = \alpha\,, \left(\frac{4}{2}\right) = \frac{\beta}{A}\,, \left(\frac{4}{3}\right) = \frac{\beta}{2B}\,, \left(\frac{4}{4}\right) = \frac{\alpha}{3A}\,;$$
$$\left(\frac{3}{1}\right) = A\,, \left(\frac{3}{2}\right) = \beta\,, \left(\frac{3}{3}\right) = \frac{\beta\beta}{\alpha B}\,;$$
$$\left(\frac{2}{1}\right) = \frac{\alpha B}{\beta}\,, \left(\frac{2}{2}\right) = B\,;$$
$$\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{\alpha A}{\beta}\,.$$

FORMEN DER 6-TEN KLASSE $\int \frac{x^{p-1}dx}{\sqrt[6]{(1-x^6)^{6-q}}} = \left(\frac{p}{q}\right)$

Hier ist $n = 6$ und die die Quadratur des Kreises involvierenden Formeln sind:

$$\left(\frac{5}{1}\right) = \frac{\pi}{6\sin\frac{\pi}{6}} = \alpha\,, \left(\frac{4}{2}\right) = \frac{\pi}{6\sin\frac{2\pi}{6}} = \beta\,, \left(\frac{3}{3}\right) = \frac{\pi}{6\sin\frac{3\pi}{6}} = \gamma\,.$$

Aber die Werte aller übrigen hängen darüber hinaus von diesen zwei Quadraturen ab:

$$\left(\frac{4}{1}\right) = A \quad \text{und} \quad \left(\frac{3}{2}\right) = B$$

und sie werden sich so zu verhalten entdeckt:

$$\binom{6}{1} = 1\,,\, \binom{6}{2} = \frac{1}{2}\,,\, \binom{6}{3} = \frac{1}{3}\,,\, \binom{6}{4} = \frac{1}{4}\,,\, \binom{6}{5} = \frac{1}{5}\,,\, \binom{6}{6} = \frac{1}{6}\,;$$
$$\binom{5}{1} = \alpha\,,\, \binom{5}{2} = \frac{\beta}{A}\,,\, \binom{5}{3} = \frac{\gamma}{2B}\,,\, \binom{5}{4} = \frac{\beta}{3A}\,,\, \binom{5}{5} = \frac{\alpha}{4A}\,;$$
$$\binom{4}{1} = A\,,\, \binom{4}{2} = \beta\,,\, \binom{4}{3} = \frac{\beta\gamma}{\alpha B}\,,\, \binom{4}{4} = \frac{\beta\gamma A}{2\alpha BB}\,;$$
$$\binom{3}{1} = \frac{\alpha B}{\beta}\,,\, \binom{3}{2} = B\,,\, \binom{3}{3} = \gamma\,;$$
$$\binom{2}{1} = \frac{\alpha B}{\gamma}\,,\, \binom{2}{2} = \frac{\alpha BB}{\gamma A}\,;$$
$$\binom{1}{1} = \frac{\alpha A}{\beta}\,.$$

FORMEN DER 7-TEN KLASSE $\int \frac{x^{p-1}dx}{\sqrt[7]{(1-x^7)^{7-q}}} = \binom{p}{q}$

Weil $n = 7$ ist, werden die von der Quadratur des Kreises abhängenden Formeln so bezeichnet:

$$\binom{6}{1} = \frac{\pi}{7\sin\frac{\pi}{7}} = \alpha\,,\, \binom{5}{2} = \frac{\pi}{7\sin\frac{2\pi}{7}} = \beta\,,\, \binom{4}{3} = \frac{\pi}{7\sin\frac{3\pi}{7}} = \gamma\,,$$

außerdem werden aber diese Formeln eingeführt:

$$\binom{5}{1} = A, \binom{4}{2} = B, \binom{3}{3} = C$$

und werden nach Geben dieser alle Formen so bestimmt werden:

$$\binom{7}{1} = 1\,,\ \binom{7}{2} = \frac{1}{2}\,,\ \binom{7}{3} = \frac{1}{3}\,,\ \binom{7}{4} = \frac{1}{4}\,,\ \binom{7}{5} = \frac{1}{5}\,,$$
$$\binom{7}{6} = \frac{1}{6}\,,\ \binom{7}{7} = \frac{1}{7}\,;$$
$$\binom{6}{1} = \alpha\,,\ \binom{6}{2} = \frac{\beta}{A}\,,\ \binom{6}{3} = \frac{\gamma}{2B}\,,\ \binom{6}{4} = \frac{\gamma}{3C}\,,\ \binom{6}{5} = \frac{\beta}{4B}\,,$$
$$\binom{6}{6} = \frac{\alpha}{5A}\,;$$
$$\binom{5}{1} = A\,,\ \binom{5}{2} = \beta\,,\ \binom{5}{3} = \frac{\beta\gamma}{\alpha B}\,,\ \binom{5}{4} = \frac{\gamma\gamma A}{2\alpha BC}\,,\ \binom{5}{5} = \frac{\beta\gamma A}{3\alpha BC}\,;$$
$$\binom{4}{1} = \frac{\alpha B}{\beta}\,,\ \binom{4}{2} = B\,,\ \binom{4}{3} = \gamma\,,\ \binom{4}{4} = \frac{\gamma\gamma}{\alpha C}\,;$$
$$\binom{3}{1} = \frac{\alpha C}{\gamma}\,,\ \binom{3}{2} = \frac{\alpha BC}{\gamma A}\,,\ \binom{3}{3} = C\,;$$
$$\binom{2}{1} = \frac{\alpha B}{\gamma}\,,\ \binom{2}{2} = \frac{\alpha\beta BC}{\gamma\gamma A}\,;$$
$$\binom{1}{1} = \frac{\alpha A}{\beta}\,.$$

Formen der 8-ten Klasse $\int \frac{x^{p-1}dx}{\sqrt[8]{(1-x^8)^{8-q}}} = \binom{p}{q}$

Weil hier $n = 8$ ist, werden die die Quadratur des Kreises verwickelnden Formeln sein:

$$\binom{7}{1} = \frac{\pi}{8\sin\frac{\pi}{8}} = \alpha\,,\ \binom{6}{2} = \frac{\pi}{8\sin\frac{2\pi}{8}} = \beta\,,$$
$$\binom{5}{3} = \frac{\pi}{8\sin\frac{3\pi}{8}} = \gamma\,,\ \binom{4}{4} = \frac{\pi}{8\sin\frac{4\pi}{8}} = \delta\,.$$

Nun werden aber die drei folgenden Formeln als bekannt angesehen:

$$\binom{6}{1} = A\,,\ \binom{5}{2} = B \quad \text{und} \quad \binom{4}{3} = C$$

und aus diesen werden alle Formeln dieser Klasse so bestimmt werden:

$$\binom{8}{1} = 1\,, \binom{8}{2} = \frac{1}{2}\,, \binom{8}{3} = \frac{1}{3}\,, \binom{8}{4} = \frac{1}{4}\,, \binom{8}{5} = \frac{1}{5}\,,$$
$$\binom{8}{6} = \frac{1}{6}\,, \binom{8}{7} = \frac{1}{7}\,, \binom{8}{8} = \frac{1}{8}\,;$$
$$\binom{7}{1} = \alpha\,, \binom{7}{2} = \frac{\beta}{A}\,, \binom{7}{3} = \frac{\gamma}{2B}\,, \binom{7}{4} = \frac{\delta}{3C}\,, \binom{7}{5} = \frac{\gamma}{4C}\,,$$
$$\binom{7}{6} = \frac{\beta}{5B}\,, \binom{7}{7} = \frac{\alpha}{6A}\,;$$
$$\binom{6}{1} = A\,, \binom{6}{2} = \beta\,, \binom{6}{3} = \frac{\beta\gamma}{\alpha B}\,, \binom{6}{4} = \frac{\gamma\delta A}{2\alpha BC}\,, \binom{6}{5} = \frac{\gamma\delta A}{3\alpha CC}\,,$$
$$\binom{6}{6} = \frac{\beta\gamma A}{4\alpha BC}\,;$$
$$\binom{5}{1} = \frac{\alpha B}{\beta}\,, \binom{5}{2} = B\,, \binom{5}{3} = \gamma\,, \binom{5}{4} = \frac{\gamma\delta}{\alpha C}\,, \binom{5}{5} = \frac{\gamma\gamma\delta A}{2\alpha\beta CC}\,;$$
$$\binom{4}{1} = \frac{\alpha C}{\gamma}\,, \binom{4}{2} = \frac{\alpha BC}{\gamma A}\,, \binom{4}{3} = C\,, \binom{4}{4} = \delta\,;$$
$$\binom{3}{1} = \frac{\alpha C}{\delta}\,, \binom{3}{2} = \frac{\alpha\beta CC}{\gamma\delta A}\,, \binom{3}{3} = \frac{\alpha CC}{\delta A};$$
$$\binom{2}{1} = \frac{\alpha B}{\gamma}\,, \binom{2}{2} = \frac{\alpha\beta BC}{\gamma\delta A}\,;$$
$$\binom{1}{1} = \frac{\alpha A}{\beta}\,.$$

Es ist möglich, daher diese Reduktionen auf die folgenden Klassen, soweit wie es beliebt, fortzusetzen. Wie sich also daher im Allgemeinen die Integrale der einzelnen Formeln verhalten werden, wollen wir nun darlegen.

Entwicklung der allgemeinen Form $\int \frac{x^{p-1}dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}} = \binom{p}{q}$

Zuerst sind also diese Formeln uneingeschränkt integrierbar:

$$\binom{n}{1} = 1\,, \binom{n}{2} = \frac{1}{2}\,, \binom{n}{3} = \frac{1}{3}\,, \binom{n}{4} = \frac{1}{4} \text{ etc.}$$

Darauf sind die von der Quadratur des Kreises abhängenden Formeln:

$$\binom{n-1}{1} = \alpha\,,\ \binom{n-2}{2} = \beta\,,\ \binom{n-3}{3} = \gamma\,,\ \binom{n-4}{4} = \delta \text{ etc.,}$$

die Progression welcher Größen schließlich zu sich selbst zurückkehrt, weil auch ist:

$$\binom{4}{n-4} = \delta\,,\ \binom{3}{n-3} = \gamma\,,\ \binom{2}{n-2} = \beta\,,\ \binom{1}{n-1} = \alpha\,.$$

Außerdem müssen aber die höheren Quadraturen zur Hilfe genommen werden, die so dargestellt werden:

$$\binom{n-2}{1} = A\,,\ \binom{n-3}{2} = B\,,\ \binom{n-4}{3} = C\,,\ \binom{n-5}{4} = D \text{ etc.,}$$

deren Anzahl in jedem Fall von selbst bestimmt werden, weil diese Formeln schließlich in sich selbst zurückkehren.
Nachdem aber diese Formeln zugelassen worden sind, werden ganz und gar alle sich auf dieselbe Klasse beziehenden definiert werden können. Wir werden aber haben, indem von der Formel $\binom{n-1}{1} = \alpha$, wie wir oben die Formeln geordnet haben, nach unten abgestiegen wird,

$$\binom{n-1}{1} = \alpha\,,\ \binom{n-2}{1} = A\,,\ \binom{n-3}{1} = \frac{\alpha B}{\beta},$$
$$\binom{n-4}{1} = \frac{\alpha C}{\gamma}\,,\ \binom{n-5}{1} = \frac{\alpha D}{\delta}\,,\ \binom{n-6}{1} = \frac{\alpha E}{\epsilon} \text{ etc.,}$$

welche Werte sich rückwärts genommen so verhalten:

$$\binom{1}{1} = \frac{\alpha A}{\beta}\,,\ \binom{2}{1} = \frac{\alpha B}{\gamma}\,,\ \binom{3}{1} = \frac{\alpha C}{\delta} \text{ etc.}$$

Dann aber, indem von derselben Formel $\binom{n-1}{1} = \alpha$ horizontal fortgeschritten wird, werden diese Formeln definiert:

$$\binom{n-1}{1} = \alpha\,,\ \binom{n-1}{2} = \frac{\beta}{A}\,,\ \binom{n-1}{3} = \frac{\gamma}{2B}\,,\ \binom{n-1}{4} = \frac{\delta}{3C} \text{ etc.,}$$

deren letzte sein wird:

$$\binom{n-1}{n-1} = \frac{\alpha}{(n-2)A}\,,$$

die vorletzte:

$$\binom{n-1}{n-2} = \frac{\beta}{(n-3)B} \,,$$

die vorvorletzte:

$$\binom{n-1}{n-3} = \frac{\gamma}{(n-4)C} \text{ etc.}$$

Indem auf die gleiche Weise von der Formel $\binom{n-2}{2} = \beta$ sowohl heruntergegangen, als auch horizontal fortgeschritten wird, werden wir die Werte der anderen erlangen. Durch Herabsteigen freilich:

$$\binom{n-2}{2} = \beta \,, \binom{n-3}{2} = B \,, \binom{n-4}{2} = \frac{\alpha BC}{\gamma A} \,,$$

$$\binom{n-5}{2} = \frac{\alpha\beta CD}{\gamma\delta A} \,, \binom{n-6}{2} = \frac{\alpha\beta DE}{\delta\epsilon A} \,, \binom{n-7}{2} = \frac{\alpha\beta EF}{\epsilon\zeta A} \text{ etc.,}$$

wo die letze sein wird:

$$\binom{2}{2} = \frac{\alpha\beta BC}{\gamma\delta A} \,,$$

die vorletzte:

$$\binom{3}{2} = \frac{\alpha\beta CD}{\delta\epsilon A} \text{ etc.}$$

und indem horizontal fortgeschritten wird:

$$\binom{n-2}{2} = \beta \,, \binom{n-2}{3} = \frac{\beta\gamma}{\alpha B} \,, \binom{n-2}{4} = \frac{\gamma\delta A}{2\alpha BC} \,,$$

$$\binom{n-2}{5} = \frac{\delta\epsilon A}{3\alpha CD} \,, \binom{n-2}{6} = \frac{\epsilon\zeta A}{4\alpha DE} \,, \binom{n-2}{7} = \frac{\zeta\eta A}{5\alpha EF} \text{ etc.,}$$

deren letzte sein wird:

$$\binom{n-2}{n-2} = \frac{\beta\gamma A}{(n-4)\alpha BC} \,,$$

die vorletzte:

$$\binom{n-2}{n-3} = \frac{\gamma\delta A}{(n-5)\alpha CD} \text{ etc.}$$

Weiter, indem von der Formel $\binom{n-3}{3} = \gamma$ herabgestiegen wird, gelangen wir zu diesen Formeln:

$$\binom{n-3}{3} = \gamma \,, \binom{n-4}{3} = C \,, \binom{n-5}{3} = \frac{\alpha CD}{\delta A} \,,$$

$$\binom{n-6}{3} = \frac{\alpha\beta CDE}{\delta\epsilon AB} \,, \binom{n-7}{3} = \frac{\alpha\beta\gamma DEF}{\delta\epsilon\zeta AB} \,, \binom{n-8}{3} = \frac{\alpha\beta\gamma EFG}{\epsilon\zeta\eta AB} \text{ etc.,}$$

und indem horizontal fortgeschritten wird:

$$\binom{n-3}{3} = \gamma \,, \binom{n-3}{4} = \frac{\gamma\delta}{\alpha C} \,, \binom{n-3}{5} = \frac{\gamma\delta\epsilon A}{2\alpha\beta CD} \,,$$
$$\binom{n-3}{6} = \frac{\delta\epsilon\zeta AB}{3\alpha\beta CDE} \,, \binom{n-3}{7} = \frac{\epsilon\zeta\eta AB}{4\alpha\beta DEF} \,, \binom{n-3}{8} = \frac{\zeta\eta\theta AB}{5\alpha\beta EFG} \text{ etc.}$$

Auf die gleiche Weise, indem von der Formel $\binom{n-4}{4} = \delta$ aus heruntergegangen wird, erhalten wir:

$$\binom{n-4}{4} = \delta \,, \binom{n-5}{4} = D \,, \binom{n-6}{4} = \frac{\alpha DE}{\epsilon A} \,,$$
$$\binom{n-7}{4} = \frac{\alpha\beta DEF}{\epsilon\zeta AB} \,, \binom{n-8}{4} = \frac{\alpha\beta\gamma DEFG}{\epsilon\zeta\eta ABC} \,, \binom{n-9}{4} = \frac{\alpha\beta\gamma\delta EFGH}{\epsilon\zeta\eta\theta ABC} \text{ etc.}$$

und indem horizontal fortgeschrittem wird:

$$\binom{n-4}{4} = \delta \,, \binom{n-4}{5} = \frac{\delta\epsilon}{\alpha D} \,,$$
$$\binom{n-4}{6} = \frac{\delta\epsilon\zeta A}{2\alpha\beta DE} \,, \binom{n-4}{7} = \frac{\delta\epsilon\zeta\eta AB}{3\alpha\beta\gamma DEF} \,,$$
$$\binom{n-4}{8} = \frac{\epsilon\zeta\eta\theta ABC}{4\alpha\beta\gamma DEFG} \,, \binom{n-4}{9} = \frac{\zeta\eta\theta\iota ABC}{5\alpha\beta\gamma EFGH} \text{ etc.}$$

Und auf diese Weise werden schließlich die Werte aller Formeln aufgefunden. Wir wollen diese allgemeinen Reduktionen anwenden auf die

Formen der 9-ten Klasse $\int \frac{x^{p-1}dx}{\sqrt[9]{(1-x^9)^{9-q}}} = \binom{p}{q}$

Dort werden wegen $n = 9$ die die Quadratur des Kreises involvierenden Formeln sein:

$$\binom{8}{1} = \alpha \,, \binom{7}{2} = \beta \,, \binom{6}{3} = \gamma \,, \binom{5}{4} = \delta \,;$$

daher ist $\epsilon = \delta \,, \zeta = \gamma \,, \eta = \beta \,, \theta = \alpha$. Darauf werden die dafür erforderlichen neuen Quadraturen festgelegt:

$$\binom{7}{1} = A \,, \binom{6}{2} = B \,, \binom{5}{3} = C \,, \binom{4}{4} = D \,;$$

und so wird sein:

$$E = C\,, F = B \quad \text{und} \quad G = A\,;$$

und nach Einräumen dieser vier Werte werden alle Werte der neunten Klasse angegeben werden können, welche wir in der gleichen Struktur, wie wir es früher gemacht haben, darstellen wollen:

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{9}{1}\right) = 1\,, \left(\frac{9}{2}\right) = \frac{1}{2}\,, \left(\frac{9}{3}\right) = \frac{1}{3}\,, \left(\frac{9}{4}\right) = \frac{1}{4}\,, \left(\frac{9}{5}\right) = \frac{1}{5}\,,\\
&\qquad \left(\frac{9}{6}\right) = \frac{1}{6}\,, \left(\frac{9}{7}\right) = \frac{1}{7}\,, \left(\frac{9}{8}\right) = \frac{1}{8}\,, \left(\frac{9}{9}\right) = \frac{1}{9}\,;\\
&\left(\frac{8}{1}\right) = \alpha\,, \left(\frac{8}{2}\right) = \frac{\beta}{A}\,, \left(\frac{8}{3}\right) = \frac{\gamma}{2B}\,, \left(\frac{8}{4}\right) = \frac{\delta}{3C}\,, \left(\frac{8}{5}\right) = \frac{\delta}{4D}\,,\\
&\qquad \left(\frac{8}{6}\right) = \frac{\gamma}{5C}\,, \left(\frac{8}{7}\right) = \frac{\beta}{6B}\,, \left(\frac{8}{8}\right) = \frac{\alpha}{7A}\,;\\
&\left(\frac{7}{1}\right) = A\,, \left(\frac{7}{2}\right) = \beta\,, \left(\frac{7}{3}\right) = \frac{\beta\gamma}{\alpha B}\,, \left(\frac{7}{4}\right) = \frac{\gamma\delta A}{2\alpha BC}\,, \left(\frac{7}{5}\right) = \frac{\delta\delta A}{3\alpha CD}\,,\\
&\qquad \left(\frac{7}{6}\right) = \frac{\gamma\delta A}{4\alpha CD}\,, \left(\frac{7}{7}\right) = \frac{\beta\gamma A}{5\alpha BC}\,;\\
&\left(\frac{6}{1}\right) = \frac{\alpha B}{\beta}\,, \left(\frac{6}{2}\right) = B\,, \left(\frac{6}{3}\right) = \gamma\,, \left(\frac{6}{4}\right) = \frac{\gamma\delta}{\alpha C}\,, \left(\frac{6}{5}\right) = \frac{\gamma\delta\delta A}{2\alpha\beta CD}\,,\\
&\qquad \left(\frac{6}{6}\right) = \frac{\gamma\delta\delta AB}{3\alpha\beta CCD}\,;\\
&\left(\frac{5}{1}\right) = \frac{\alpha C}{\gamma}\,, \left(\frac{5}{2}\right) = \frac{\alpha BC}{\gamma A}\,, \left(\frac{5}{3}\right) = C\,, \left(\frac{5}{4}\right) = \delta\,, \left(\frac{5}{5}\right) = \frac{\delta\delta}{\alpha D}\,;\\
&\left(\frac{4}{1}\right) = \frac{\alpha D}{\delta}\,, \left(\frac{4}{2}\right) = \frac{\alpha\beta CD}{\gamma\delta A}\,, \left(\frac{4}{3}\right) = \frac{\alpha CD}{\delta A}\,, \left(\frac{4}{4}\right) = D\,;\\
&\left(\frac{3}{1}\right) = \frac{\alpha C}{\delta}\,, \left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\alpha\beta CD}{\delta\delta A}\,, \left(\frac{3}{3}\right) = \frac{\alpha\beta CCD}{\delta\delta AB}\,;\\
&\left(\frac{2}{1}\right) = \frac{\alpha B}{\gamma}\,, \left(\frac{2}{2}\right) = \frac{\alpha\beta BC}{\gamma\delta A}\,;\\
&\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{\alpha A}{\beta}\,;
\end{aligned}$$

Die Struktur dieser Formeln verdient auch im Allgemeinen, indem von links nach rechts gegangen wird, angemerkt zu werden, wo freilich zwei

Geschlechter von Progressionen auftauchen, je nachdem ob wir von der ersten vertikalen Reihe oder der obersten horizontalen beginnen. Auf diese Weise, indem zuerst von der vertikalen Reihe begonnen wird:

$\left(\frac{n-1}{1}\right) = \alpha,\ \left(\frac{n-2}{2}\right) = \frac{\beta}{\alpha} \times \left(\frac{n-1}{1}\right),\ \left(\frac{n-3}{3}\right) = \frac{\gamma}{\beta} \times \left(\frac{n-2}{2}\right),\ \left(\frac{n-4}{4}\right) = \frac{\delta}{\gamma} \times \left(\frac{n-3}{3}\right) \ldots$

$\left(\frac{n-2}{1}\right) = A,\ \left(\frac{n-3}{2}\right) = \frac{B}{A} \times \left(\frac{n-2}{1}\right),\ \left(\frac{n-4}{3}\right) = \frac{C}{B} \times \left(\frac{n-3}{2}\right),\ \left(\frac{n-5}{4}\right) = \frac{D}{C} \times \left(\frac{n-4}{3}\right)$

$\left(\frac{n-3}{1}\right) = \frac{\alpha B}{\beta}, \left(\frac{n-4}{2}\right) = \frac{\beta C}{\gamma A} \times \left(\frac{n-3}{1}\right), \left(\frac{n-5}{3}\right) = \frac{\gamma D}{\delta B} \times \left(\frac{n-4}{2}\right), \left(\frac{n-6}{4}\right) = \frac{\delta E}{\epsilon C} \times \left(\frac{n-5}{3}\right)$

$\left(\frac{n-4}{1}\right) = \frac{\alpha C}{\gamma}, \left(\frac{n-5}{2}\right) = \frac{\beta D}{\delta A} \times \left(\frac{n-4}{1}\right), \left(\frac{n-6}{3}\right) = \frac{\gamma E}{\epsilon B} \times \left(\frac{n-5}{2}\right), \left(\frac{n-7}{4}\right) = \frac{\delta F}{\zeta C} \times \left(\frac{n-6}{3}\right)$

$\left(\frac{n-5}{1}\right) = \frac{\alpha D}{\delta}, \left(\frac{n-6}{2}\right) = \frac{\beta E}{\epsilon A} \times \left(\frac{n-5}{1}\right), \left(\frac{n-7}{3}\right) = \frac{\gamma F}{\zeta B} \times \left(\frac{n-6}{2}\right), \left(\frac{n-8}{4}\right) = \frac{\delta G}{\eta C} \times \left(\frac{n-7}{3}\right)$

$\left(\frac{n-6}{1}\right) = \frac{\alpha E}{\epsilon}, \left(\frac{n-7}{2}\right) = \frac{\beta F}{\zeta A} \times \left(\frac{n-6}{1}\right), \left(\frac{n-8}{3}\right) = \frac{\gamma G}{\eta B} \times \left(\frac{n-7}{2}\right), \left(\frac{n-9}{4}\right) = \frac{\delta H}{\theta C} \times \left(\frac{n-8}{3}\right)$

etc.;

darauf, indem von der obersten horizontalen begonnen wird:

$\left(\frac{n}{1}\right) = 1, \left(\frac{n-1}{2}\right) = \frac{\beta}{A} \times \left(\frac{n}{1}\right), \left(\frac{n-2}{3}\right) = \frac{\gamma A}{\alpha B} \times \left(\frac{n-1}{2}\right), \left(\frac{n-3}{4}\right) = \frac{\delta B}{\beta C} \times \left(\frac{n-2}{3}\right) \ldots$

$\left(\frac{n}{2}\right) = \frac{1}{2}, \left(\frac{n-1}{3}\right) = \frac{\gamma}{B} \times \left(\frac{n}{2}\right), \left(\frac{n-2}{4}\right) = \frac{\delta A}{\alpha C} \times \left(\frac{n-1}{3}\right), \left(\frac{n-3}{5}\right) = \frac{\epsilon B}{\beta D} \times \left(\frac{n-2}{4}\right)$

$\left(\frac{n}{3}\right) = \frac{1}{3}, \left(\frac{n-1}{4}\right) = \frac{\delta}{C} \times \left(\frac{n}{3}\right), \left(\frac{n-2}{5}\right) = \frac{\epsilon A}{\alpha D} \times \left(\frac{n-1}{4}\right), \left(\frac{n-3}{6}\right) = \frac{\zeta B}{\beta E} \times \left(\frac{n-2}{5}\right)$

$\left(\frac{n}{4}\right) = \frac{1}{4}, \left(\frac{n-1}{5}\right) = \frac{\epsilon}{D} \times \left(\frac{n}{4}\right), \left(\frac{n-2}{6}\right) = \frac{\zeta A}{\alpha E} \times \left(\frac{n-1}{5}\right), \left(\frac{n-3}{7}\right) = \frac{\eta B}{\beta F} \times \left(\frac{n-2}{6}\right)$

$\left(\frac{n}{5}\right) = \frac{1}{5}, \left(\frac{n-1}{6}\right) = \frac{\zeta}{E} \times \left(\frac{n}{5}\right), \left(\frac{n-2}{7}\right) = \frac{\eta A}{\alpha F} \times \left(\frac{n-1}{6}\right), \left(\frac{n-3}{8}\right) = \frac{\theta B}{\beta G} \times \left(\frac{n-2}{7}\right)$

etc.;

Dort ist das Gesetz, nach welchem diese Formeln voneinander abhängen, hinreichend klar, wenn wir nur anmerken, dass in jeder der beiden Reihen der Buchstaben α, β, γ, δ, etc. und A, B, C, D, etc. die dem ersten vorausgehenden Terme einander gleich sind.

Schlusssatz

Während wir also die Formeln der zweiten Klasse nach Erlauben der Quadratur des Kreises darbieten können, erfordern die Formeln der dritten Klasse darüber hinaus eine entweder in dieser Formel enthaltene Quadratur

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}} = A \quad \text{oder in dieser} \quad \int \frac{xdx}{\sqrt[3]{(1-x^3)}} = \frac{\alpha}{A},$$

weil ja, nach Geben einer einzigen, die andere zugleich gegeben ist. Wenn wir daher diese Formeln durch ein unendliches Produkt ausdrücken, wird deren

Wert aufgefunden:

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}} = \frac{2}{1} \cdot \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 4} \cdot \frac{6 \cdot 8}{7 \cdot 7} \cdot \frac{9 \cdot 11}{10 \cdot 10} \cdot \frac{12 \cdot 14}{13 \cdot 13} \cdot \text{ etc.},$$

woher ihre Größe in der Tat näherungsweise hinreichend bequem erschlossen werden kann; Auf die gleiche Weise ist:

$$\int \frac{xdx}{\sqrt[3]{1-x^3}} = 1 \cdot \frac{3 \cdot 7}{5 \cdot 5} \cdot \frac{6 \cdot 10}{8 \cdot 8} \cdot \frac{9 \cdot 13}{11 \cdot 11} \cdot \frac{12 \cdot 16}{14 \cdot 14} \cdot \text{ etc.}$$

Des Weiteren werden wir alle Formen der vierten Klasse integrieren können, wenn nur außer der Quadratur des Kreises eine aus diesen vier Formeln bekannt war $\left(\frac{2}{1}\right)$, $\left(\frac{1}{1}\right)$, $\left(\frac{3}{2}\right)$, $\left(\frac{3}{3}\right)$, die diese Formeln liefern:

$$\int \frac{xdx}{\sqrt[4]{(1-x^4)^3}} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sqrt[4]{(1-xx)^3}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = A\,,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)^3}} = \frac{\alpha A}{\beta}\,, \int \frac{xxdx}{\sqrt[4]{1-x^4}} = \frac{\alpha}{2A}\,,$$

$$\int \frac{xxdx}{\sqrt{1-x^4}} = \int \frac{xdx}{\sqrt[4]{1-x^4}} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sqrt[4]{1-xx}} = \frac{\beta}{A}\,;$$

aber durch ein unendliches Produkt wird sein:

$$A = \frac{3}{1 \cdot 2} \cdot \frac{4 \cdot 7}{5 \cdot 6} \cdot \frac{8 \cdot 11}{9 \cdot 10} \cdot \frac{12 \cdot 15}{13 \cdot 14} \cdot \frac{16 \cdot 19}{17 \cdot 18} \cdot \text{ etc.}$$

Die fünfte Klasse erfordert diese zwei höheren Quadraturen $\left(\frac{3}{1}\right) = A$ und $\left(\frac{2}{2}\right) = B$, an deren Stelle zwei andere von diesen abhängende angenommen werden können, welche freilich leichter scheinen mögen, auch wenn wegen der Primzahl 5 die einen kaum einfacher als die anderen gehalten werden können.

Für die sechste Klasse werden auch die zwei Quadraturen $\left(\frac{4}{1}\right) = A$ und $\left(\frac{3}{2}\right) = B$ verlangt. Aber hier kann anstelle der einen die, die in der dritten Klasse von Nöten war, angenommen werden, dass nur eine einzige neue zu verwenden ist. Weil nämlich gilt:

$$\left(\frac{2}{2}\right) = \int \frac{xdx}{\sqrt[6]{(1-x^6)^4}} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}} = \frac{\alpha BB}{\gamma A}\,,$$

wird sein:

$$\frac{2\alpha BB}{\gamma A} = \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}} \ ,$$

welches die für die dritte Klasse verlangte Formel ist. Nachdem also diese gegeben worden ist, wenn darüber hinaus diese Formel bekannt wird:

$$\left(\frac{3}{2}\right) = \int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^6}} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^3}} = B$$

oder auch diese:

$$\left(\frac{4}{3}\right) = \int \frac{xxdx}{\sqrt[3]{1-x^6}} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{\sqrt[3]{1-xx}} = \frac{\beta\gamma}{\alpha B} \ ,$$

welche die einfachsten in der Art sind, werden alle übrigen durch diese definiert werden können. Nach Kombinieren von diesen tritt es klar zutage, dass sein wird:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^3}} = \int \frac{dx}{\sqrt[3]{1-xx}} = \frac{6\beta\gamma}{\alpha} = \frac{\pi}{\sqrt{3}} \ .$$

Auf die gleiche Weise wird aus den Formeln der vierten Klasse erschlossen:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} \cdot \int \frac{dx}{\sqrt[4]{1-x^2}} = \frac{\pi}{2} \ ,$$

von Theoremen welcher Art eine riesige Menge daher abgeleitet werden kann, unter welchen dieses besonders merkwürdig ist:

$$\int \frac{dx}{\sqrt[m]{1-x^n}} \cdot \int \frac{dx}{\sqrt[n]{1-x^m}} = \frac{\pi \sin\frac{(m-n)\pi}{mn}}{(m-n)\sin\frac{\pi}{m}\cdot\sin\frac{\pi}{n}} \ ,$$

welches, wenn m und n gebrochene Zahlen sind, in diese Form verwandelt wird:

$$\int \frac{x^{q-1}dx}{\sqrt[r]{(1-x^p)^s}} = \int \frac{x^{s-1}dx}{\sqrt[p]{(1-x^r)^q}} = \frac{\pi\sin\left(\frac{s}{r}-\frac{q}{p}\right)\pi}{(ps-qr)\sin\frac{q\pi}{p}\cdot\sin\frac{s\pi}{r}} \ .$$

Im Allgemeinen ist in der Tat:

$$\left(\frac{n-p}{q}\right)\left(\frac{n-q}{p}\right) = \frac{\left(\frac{n-p}{p}\right)\left(\frac{n-q}{q}\right)}{(q-p)(\frac{n-q+p}{q-p})} \ ,$$

welches diese Form liefert:

$$\int \frac{x^{p-1}dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^q}} \cdot \int \frac{x^{q-1}dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^q}} = \frac{\pi \sin \frac{(q-p)\pi}{n}}{n(q-p)\sin\frac{p\pi}{n} \cdot \sin\frac{q\pi}{n}} ,$$

woher nicht nur die vorhergehenden Lehrsätze, sondern auch viele andere leicht deriviert werden. Denn nach Festlegen von $n = \frac{pq}{m}$ werden wir haben:

$$\int \frac{x^{m-1}dx}{\sqrt[p]{(1-x^q)^m}} \cdot \int \frac{x^{m-1}dx}{\sqrt[q]{(1-x^p)^m}} = \frac{\pi \sin\left(\frac{m}{p} - \frac{m}{q}\right)\pi}{m(q-p)\sin\frac{m\pi}{q} \cdot \sin\frac{m\pi}{p}} ,$$

welche sich so weiter ausdehnen lässt:

$$\int \frac{x^{p-1}dx}{\sqrt[n]{(1-x^m)^q}} \cdot \int \frac{x^{q-1}dx}{\sqrt[m]{(1-x^n)^p}} = \frac{\pi \sin\left(\frac{q}{n} - \frac{p}{m}\right)\pi}{(mq-np)\sin\frac{p\pi}{m} \cdot \sin\frac{q\pi}{n}} .$$

Wenn in dieser $n = 2q$ gesetzt wird, wird sein:

$$\int \frac{x^{p-1}dx}{\sqrt{1-x^m}} \cdot \int \frac{x^{q-1}dx}{\sqrt[m]{(1-x^{2q})^p}} = \frac{\pi \cos\frac{p\pi}{m}}{q(m-2p)\sin\frac{p\pi}{m}} .$$

Aber wenn in der Integralformel $x^{2q} = 1 - y^m$ gesetzt wird, wird sein:

$$\int \frac{x^{q-1}dx}{\sqrt[m]{(1-x^{2q})^p}} = \frac{m}{2q} \int \frac{y^{m-p-1}dy}{\sqrt{1-y^m}} ,$$

woher nach Schreiben von x für y ist:

$$\int \frac{x^{p-1}dx}{\sqrt{1-x^m}} \cdot \int \frac{x^{m-p-1}dx}{\sqrt{1-x^m}} = \frac{2\pi \cos\frac{p\pi}{m}}{m(m-2p)\sin\frac{p\pi}{m}} .$$

Auf die gleiche Weise, wenn im Allgemeinen für die andere Integralformel $1 - x^n = y^m$ festgelegt wird, wird werden:

$$\int \frac{x^{q-1}dx}{\sqrt[m]{(1-x^n)^p}} = \frac{m}{n} \int \frac{y^{m-p-1}dy}{\sqrt[n]{(1-y^m)^{n-q}}} ,$$

woher, nachdem wiederum x für y geschrieben worden ist, erhalten werden wird:

$$\int \frac{x^{p-1}dx}{\sqrt[n]{(1-x^m)^q}} \cdot \int \frac{x^{m-p-1}dx}{\sqrt[n]{(1-x^m)^{n-q}}} = \frac{n\pi \sin\left(\frac{q}{n} - \frac{p}{m}\right)\pi}{m(mq-np)\sin\frac{p\pi}{m} \cdot \sin\frac{q\pi}{n}} ,$$

welcher Wert auf $\frac{n\pi}{m(mq-np)}\left(\cot\frac{p\pi}{m}-\cot\frac{q\pi}{n}\right)$ reduziert. Und daher resultiert diese gefälligere Form:

$$\int \frac{x^{\frac{m-r}{2}-1}dx}{\sqrt[n]{(1-x^m)^{\frac{n-s}{2}}}} \cdot \int \frac{x^{\frac{m+r}{2}-1}dx}{\sqrt[n]{(1-x^m)^{\frac{n+s}{2}}}} = \frac{2n\pi\left(\tan\frac{r\pi}{2m}-\tan\frac{s\pi}{2n}\right)}{m(nr-ms)} .$$

Weil das Fundament dieser Reduktionen in dieser Gleichheit gelegen ist:

$$\left(\frac{n-p}{q}\right)\left(\frac{n-q}{p}\right) = \frac{\left(\frac{n-p}{p}\right)\left(\frac{n-q}{q}\right)}{(q-p)\left(\frac{n-q+p}{q-p}\right)} ,$$

die auf diese Form zurückgeführt wird:

$$\left(\frac{n-p}{q}\right)\left(\frac{n-q}{p}\right)\left(\frac{n-q+p}{q-p}\right) = \left(\frac{n}{q-p}\right)\left(\frac{n-p}{p}\right)\left(\frac{n-q}{q}\right) ,$$

kann deren Gültigkeit auf diese Weise direkt gezeigt werden.

Nach in der in §8 angegebenen Reduktion für die drei Zahlen p, q, r diese $n-q$, $q-p$, q genommen worden sind, werden wir haben:

$$\left(\frac{n-q}{q-p}\right)\left(\frac{n-p}{q}\right) = \left(\frac{n-q}{q}\right)\left(\frac{n}{q-p}\right) ;$$

dann wird aber, nachdem an derer Stelle $n-q$, $q-p$, p genommen worden sind, sein:

$$\left(\frac{n-q}{p}\right)\left(\frac{n-q+p}{q-p}\right) = \left(\frac{n-q}{q-p}\right)\left(\frac{n-p}{p}\right) ,$$

nach Multiplizieren welcher Gleichungen miteinander und Wegschaffen der gemeinsamen Formel $\left(\frac{n-q}{q-p}\right)$ durch Division sein wird:

$$\left(\frac{n-p}{q}\right)\left(\frac{n-q}{p}\right)\left(\frac{n-q+p}{q-p}\right) = \left(\frac{n}{q-p}\right)\left(\frac{n-p}{p}\right)\left(\frac{n-q}{q}\right) .$$

Ja es kann sogar eine vom Exponenten n nicht abhängende Gleichheit dreier Formeln dieser Art dargeboten werden, natürlich:

$$\left(\frac{s}{p}\right)\left(\frac{r+s}{q}\right)\left(\frac{p+s}{r}\right) = \left(\frac{r+s}{p}\right)\left(\frac{s}{q}\right)\left(\frac{q+s}{r}\right) =$$
$$= \left(\frac{r}{p}\right)\left(\frac{r+s}{q}\right)\left(\frac{p+r}{s}\right) = \left(\frac{r+s}{p}\right)\left(\frac{r}{q}\right)\left(\frac{q+r}{s}\right) ,$$

die sogar vier nicht vom Exponenten n abhängende Buchstaben involviert und die der Gleichheit zwischen den Produkten je zweier Formeln ähnlich ist:

$$\binom{r}{p}\binom{p+r}{q}=\binom{q+r}{p}\binom{r}{q}=\binom{q}{p}\binom{p+q}{r}\ .$$

Man hat sogar diese Gleichheit zwischen Produkten je dreier Formeln:

$$\begin{aligned}\binom{p}{q}\binom{r}{s}\binom{p+q}{r+s}=\binom{q}{r}\binom{s}{p}\binom{q+r}{p+s}=&\\ =\binom{p}{q}\binom{q}{s}\binom{p+r}{q+s}=\binom{p}{q}\binom{p+q}{r}\binom{p+q+r}{s}=&\\ =\binom{p}{q}\binom{p+q}{s}\binom{p+q+s}{r}\ \text{etc.}&\end{aligned}$$

In diesen können nämlich die Buchstaben p, q, r, s auf irgendeine Weise miteinander vertauscht werden.